Ex 44

① $f'(x) = \left(x + \ln(x) - 2\right)' = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

pour tout $x \in]0, +\infty[$: $x+1 > 0$ et $x > 0$

donc $f'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim \underbrace{x}_{\nearrow +\infty} + \underbrace{\ln(x)}_{\nearrow +\infty} - 2 = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \underbrace{x}_{\nearrow 0} + \underbrace{\ln(x)}_{\nearrow -\infty} - 2 = -\infty$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

② f continue et monotone (strictement croissante) sur $]1, 2[$

$\begin{cases} f(1) = 1 + \ln(1) - 2 = -1 \\ f(2) = 2 + \ln(2) - 2 = \ln(2) \simeq 0{,}69 \end{cases} \Rightarrow f(1) \times f(2) < 0$

d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1, 2[$

Conclusion

on a : $f(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + \ln(\alpha) - 2 = 0$

$\Rightarrow \ln(\alpha) = 2 - \alpha$

③

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

Montrer que $g(x) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$

$x \in [\alpha, +\infty[\Rightarrow x \geq \alpha$

$\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha)$ car g est croissante

$\Rightarrow g(x) \geq 0$

Montrer que $g(x) \leq 0$ sur $]0, \alpha]$

$x \in]0, \alpha] \Rightarrow x \leq \alpha$

$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$ car g est croissante

$\rightarrow g(x) \leq 0$