Ex 46

1) $\lim\limits_{+\infty} f(x) = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{x} + \ln(x) - 2 = "0 + \infty - 2" = +\infty$

$\lim\limits_{0^+} f(x) = \lim\limits_{0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) - 2 = \lim\limits_{0^+} \frac{1 + x\ln(x) - 2x}{x} = "\frac{1}{0^+}" = +\infty$

$f'(x) = \left(\frac{1}{x} + \ln(x) - 2\right)' = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$

$f'(x)$ est du signe de $x-1$ car

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	

* si $x \in]0,1]$: $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f$ est décroissante sur $]0,1]$
* si $x \in [1,+\infty[$: $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ est croissante sur $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	0	$+$	
f	|| $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2) on a f continue et monotone (st croissante) sur $[1,+\infty[$. or $f([1,+\infty[) = [-1,+\infty[$, $0 \in [-1,+\infty[$

d'après TVI l'equation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.

$f(6) = \frac{1}{6} + \ln(6) - 2 = \ln(6) - \frac{11}{6} \simeq -0{,}04$

$f(7) = \frac{1}{7} + \ln(7) - 2 = \ln(7) - \frac{13}{7} \simeq 0{,}08$

$f(6) \times f(7) < 0 \Longrightarrow 6 < \alpha < 7$

3) f continue et monotone (str décroissante) sur $]\frac{1}{2}, 1[$

$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{\frac{1}{2}} + \ln(\frac{1}{2}) - 2 = 2 - \ln(2) - 2 = -\ln(2) \simeq -0{,}69$

$f(1) = 1 + \ln(1) - 2 = -1$ $\quad f(\frac{1}{2}) \cdot f(1) < 0$

d'après TVI : l'equation $f(x) = 0$ admet une unique solution β dans $]\frac{1}{2}, 1[$

4)

x	0		β		1		α		$+\infty$
$f'(x)$	||			$-$	0	$+$			
f	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$f(x) \geq 0$ sur $]0,\beta] \cup [\alpha,+\infty[$

$f(x) \leq 0$ sur $[\beta,\alpha]$