Solution exercice 43

1) a) pour $n=0$: $U_0 > \frac{1}{2}$ Vraie

supposons que $U_n > \frac{1}{2}$ et Montrons que $U_{n+1} > \frac{1}{2}$

$$U_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{2}{13} U_n + \frac{11}{26} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{2}{13} U_n - \frac{1}{13} = \frac{2}{13}\left(U_n - \frac{1}{2}\right)$$

On a $U_n > \frac{1}{2}$ donc $U_n - \frac{1}{2} > 0$ d'ou $U_{n+1} > \frac{1}{2}$

Conclusion : $U_n > \frac{1}{2}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) $$U_{n+1} - U_n = \frac{2}{13} U_n + \frac{11}{26} - U_n$$

$$= -\frac{11}{13} U_n + \frac{11}{26}$$

$$= -\frac{11}{13} \cdot \left(U_n - \frac{1}{2}\right)$$

On a : $-\frac{11}{13} < 0$ et $U_n - \frac{1}{2} > 0$ donc $U_{n+1} - U_n < 0$

car d (U_n) est décroissante.

(U_n) décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc convergente

2) a) $V_n = \frac{1}{2} - U_n \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2} - U_{n+1}$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{13} U_n + \frac{11}{26}\right)$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{13} U_n - \frac{11}{26}$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{13} - \frac{2}{13} U_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} = \frac{2}{13}\left(\frac{1}{2} - U_n\right) = \frac{2}{13} V_n$$

(V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{13}$

et de premier terme $V_0 = \frac{1}{2} - U_0 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$

ⓑ On a : $V_n = V_0 \cdot q^n \Rightarrow V_n = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{13}\right)^n$

ⓒ $V_n = \frac{1}{2} - U_n \Rightarrow U_n = \frac{1}{2} - V_n$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{13}\right)^n\right)$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\left(\frac{2}{13}\right)^n$$

on a : $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{2}{13}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{13} < 1$

donc $\lim\limits_{+\infty} U_n = \lim\limits_{+\infty} \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cancel{\left(\frac{2}{13}\right)^n}^{\to 0} = \frac{1}{2}$

ⓓ $S_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}$

$$= V_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \left(\frac{V_0}{1-q}\right)\left(1-q^n\right)$$

$$= \frac{-3/2}{1-\frac{2}{13}}\left(1-\left(\frac{2}{13}\right)^n\right) = -\frac{39}{22}\left(1-\left(\frac{2}{13}\right)^n\right)$$

$T_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_{n-1}$ $\quad U_n = \frac{1}{2} - V_n$

$$= \left(\frac{1}{2} - V_0\right) + \left(\frac{1}{2} - V_1\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2} - V_{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}\right) - \left(V_0 + V_1 + \cdots + V_{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot n\right) - \left(-\frac{39}{22}\left(1-\left(\frac{2}{13}\right)^n\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2} n + \frac{39}{22}\left(1-\left(\frac{2}{13}\right)^n\right)$$