Ex 45

$f'(x) = \left(-\ln(x) - 2x\right)' = -\frac{1}{x} - 2 = \frac{-1-2x}{x}$

$f'(x)$ est du signe de $-1-2x$ car $x > 0$

x	0		$+\infty$
$-1-2x$	||	$-$	

pour tout $x \in]0,+\infty[$: $f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ f est décroissante sur $]0,+\infty[$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	||	$-$	
f	||	$\searrow$	

on a f continue et monotone (str décroissante) sur $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln\left(\frac{1}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(4) - \frac{1}{2} \simeq 0,88$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) - 1 \simeq -0,3$

donc $f\left(\frac{1}{4}\right) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

d'après TVI l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$

Conclusion

on a $f(\alpha) = 0 \Rightarrow -\ln(\alpha) - 2\alpha = 0$

$\Rightarrow -\ln(\alpha) = 2\alpha \Rightarrow \ln(\alpha) = -2\alpha \Rightarrow \alpha = e^{-2\alpha}$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||		$-$		
f	||	$\searrow$	0	$\searrow$	

Montrer que $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$

$x \in [\alpha, -\infty[\Rightarrow x \geq \alpha$

$\Rightarrow g(x) \leq g(\alpha)$ car g est décroissante

$\Rightarrow g(x) \leq 0$

Montrer que $g(x) \geq 0$ sur $]0, \alpha]$

$x \in]0, \alpha] \Rightarrow x \leq \alpha$

$\Rightarrow g(x) \geq g(\alpha)$ car g est décroissante

$\Rightarrow g(x) \geq 0$