Solution exercice 39

- pour $n = 0$: $U_0 > 3$ l inégalité est vraie
- supposons que $U_n > 3$ et montrons que $U_{n+1} > 3$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{4Un + 9}{U_n + 4} - 3 = \frac{4U_n + 9 - 3U_n - 12}{U_n + 4} = \frac{U_n - 3}{U_n + 4}$$

Par hypothèse $U_n > 3$ donc $U_n - 3 > 0$ et $U_n + 4 > 0$

On obtient $U_{n+1} - 3 > 0$

Conclusion : $U_n > 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a $U_{n+1} - 3 = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 4}$

$$\begin{aligned}
|U_{n+1} - 3| - \frac{1}{7}|U_n - 3| &= \left|\frac{U_n - 3}{U_n + 4}\right| - \frac{1}{7}|U_n - 3| \\
&= \frac{|U_n - 3|}{|U_n + 4|} - \frac{1}{7}|U_n - 3| \\
&= \frac{|U_n - 3|}{U_n + 4} - \frac{1}{7}|U_n - 3| \\
&= |U_n - 3|\left(\frac{1}{U_n + 4} - \frac{1}{7}\right) \\
&= |U_n - 3|\left(\frac{3 - U_n}{7(U_n + 4)}\right) \leq 0
\end{aligned}$$

Puisque $U_n > 3$ et $3 - U_n < 0$

on peut conclure que $|U_{n+1} - 3| \leq \dfrac{1}{7}|U_n - 3|$

En déduire par récurrence $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ $n \in \mathbb{N}$

- pour $n = 0$: $|U_0 - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^0$ l inégalité est vraie

- supposons que $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ et montrons que $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

On a
$$\left[\begin{array}{l} |U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{7}|U_n - 3| \\ |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n \end{array}\right. \quad \times \frac{1}{7}$$

Ainsi
$$\left[\begin{array}{l} |U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{7}|U_n - 3| \\ \frac{1}{7}|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1} \end{array}\right.$$

On obtient $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^{n+1}$

Conclusion : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

On a $\lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ Car $-1 < \frac{1}{7} < 1$

$$\lim_{+\infty} U_n = 3 \Longleftarrow \left[\begin{array}{l} |U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n \\ \lim\limits_{+\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0 \end{array}\right.$$